数理解析研究所講究録
1183 巻 2001 年 148-156

退化 affine Hecke 代数の主系列加群の組成列について

東京大学大学院数理科学研究科 博士課程 3 年　本田 龍央
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Tatsuo Honda

§0. Introduction

表題の退化 affine Hecke 代数は, Drinfeld, Lusztig によって独立に導入された generic な affine Hecke 代数のある filteration に関する次数化であるような代数である ([5]). また退化 affine Hecke 代数は Dunkl 作用素と Weyl 群の作用の作る関数空間上の作用素代数として実現され, Heckman-Opdam の多変数超幾何関数の理論, 有理型, 三角型 Calogero-Sutherland 模型の固有値問題等への応用を持つ.

ここでは退化 affine Hecke 代数の有限次元加群を考える. 有限次元の単純加群は様々な形で分類されている. 例えば Lie 群の admissible 表現の Langlands 分類の類似 ([2]), Lusztig の幾何学的構成による分類 ([4]), 等. 一方, 有限次元単純加群は主系列加群と呼ばれる加群 (Hecke 代数の主系列 (= Matsumoto model [7]) の退化 affine Hecke 代数での対応物) の部分剰余加群として実現される. そこでこの主系列加群の組成列を具体的に構成することを考える. 退化 affine Hecke 代数は root system の data によって構成され, 主系列加群はその root system がある線形空間の元で parametrize される. 主系列加群の間には特殊な intertwining operator があり, §2 では parameter が正則な場合に, この intertwining operator を用いて組成列が構成する. 更にこの組成列に現れる部分加群が root system に付随する Weyl 群 W の left cell を用いて表記できることをみる. 特にここで現れる left cell は W の放物型部分群に対応するものだけが使われる. §3 では上の root system が A_3 型であり, かつ parameter が退化する場合について幾つかの例で考察する. 放物型部分加群に対応しない W の left cell を含む W の群環の左 ideal が組成列の中に現れることみる.

§1. 主系列加群の定義

次のように記号を設定する;

- $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}, (\cdot,\cdot))$: n 次元 Euclid 空間,　$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{a}$ の複素化,
- $R \subset \mathfrak{a}^*$: $\mathfrak{a}$ 上の被約 crystallographic root system,
- W : R の Weyl 群,
- R_+ : R の positive system,
- $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$: R_+ に対応する R の基底,
- $\alpha^\vee$: $\alpha \in R$ に対応する coroot,
- r_α : $\alpha \in R$ に関する直交鏡映, 特に $r_i = r_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$,
- l : $\{r_1, \cdots, r_n\}$ に関する W 上の長さ関数,
- w_0 : l に関する W の最長元,
- $k : R \to \mathbb{C}$: R 上の重複度関数 (i.e. $k_\alpha = k_{w\alpha}$ $(\forall\alpha \in R,\ w \in W)$), 特に $k_i = k_{\alpha_i}$,
- $\mathbb{C}[c]$: c を不定元とする $\mathbb{C}$ 係数 1 変数多項式環,　$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c$.

Definition 1. $\mathbb{C}$ 代数 $\mathbf{H} = \mathbf{H}(R_+, k)$ が次の条件をみたすとき, $\mathbf{H}$ を R_+, k に付随する "退化 affine Hecke 代数" と呼ぶ;

1. $\mathbb{C}$ 線形空間として, $\mathbf{H} \cong S(\widehat{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W]$,
2. $S(\widehat{\mathfrak{h}})$, $\mathbb{C}[W]$ は $\mathbf{H}$ の単位的部分 $\mathbb{C}$ 代数,

3. $\mathbb{C}[c] \subset Z(\mathbf{H})$ $(= \mathbf{H}$ の中心$)$,
4. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\xi \in \widehat{\mathfrak{h}}$ に対し,

$$\xi \cdot r_i \;=\; r_i(\xi) \cdot r_i - k_i \alpha_i(\xi) c$$

退化 affine Hecke 代数は generic な affine Hecke 代数に適当な filteration をとり, それに関する次数化として現れ, 上の定義で現れる c は generic Hecke 代数の parameter q の像になっている ([5]) [1].

$\mathcal{R}(\mathbf{H})$ を有限次元 $\mathbf{H}$ 加群の圏とし, $K_0(\mathcal{R}(\mathbf{H}))$ を $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ の Grothendieck 群, また $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R}(\mathbf{H}))$ に対し, 対応する $K_0(\mathcal{R}(\mathbf{H}))$ の元を $[M]$ とする. $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R}(\mathbf{H}))$, $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ に対し

$$M^\lambda \;:=\; \{\, m \in M \;:\; \xi \cdot m = \lambda(\xi) m \quad (\forall \xi \in \widehat{\mathfrak{h}}) \,\}$$

とし, $M^\lambda \neq 0$ のとき, λ を M の weight と呼ぶ.
各 $\alpha_i \in \Pi$ に対し,

$$\tau_i \;:=\; r_i \cdot \alpha_i - k_i c$$

という $\mathbf{H}$ の元を考えると $\tau_i M^\lambda \subset M^{r_i \lambda}$ となることが容易にわかる. 特に $w \in W$ に対し, $w = r_{i_1} \cdots r_{i_l}$ を w の被約表示とするとき,

$$\tau_w \;:=\; \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_l}$$

は well-defined であり, $\tau_w M^\lambda \subset M^{w\lambda}$ となる ([8]).

Definition 2. $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ に対し, $\chi_\lambda : S(\widehat{\mathfrak{h}}) \to \mathbb{C}$ を λ より誘導される 1 次元表現とし, それに付随する加群を $\mathbb{C}_\lambda$ とするとき,

$$\mathbf{I}_\lambda \;:=\; \mathrm{Ind}_{S(\widehat{\mathfrak{h}})}^{\mathbf{H}} \mathbb{C}_\lambda$$

を "主系列加群" と呼ぶ. $1 \in \mathbb{C}_\lambda$ を 1_λ と記すことにする.

Proposition 1. (i) $\mathbb{C}[W]$ 加群として $\mathbf{I}_\lambda \cong \mathbb{C}[W]$.
(ii) $\mathbf{I}_\lambda$ は次のような普遍性を持つ, 即ち, 任意の $\mathbf{H}$ 加群 M と $m \in M^\lambda$ に対して, $\phi(e \otimes 1_\lambda) = m$ となる $\mathbf{H}$ 加群射 ϕ が一意的に存在する.
(iii) λ に於ける固定部分群 W_λ が W の標準放物型部分群のとき, $\mathbf{I}_\lambda$ は最大の部分 $\mathbf{H}$ 加群を持つ. これによる $\mathbf{I}_\lambda$ の剰余 $\mathbf{H}$ 加群を $\mathbf{J}_\lambda$ と記すことにする.

特に $e \otimes 1_\lambda$ は λ を weight に持つ weight vector であり, $\tau_w(e \otimes 1_\lambda) \in \mathbf{I}_\lambda^{w\lambda}$ となる. 特に λ が正則, 即ち $\lambda(\alpha^\vee) \neq 0$ $(\forall \alpha \in R)$ であるとき, $\mathbf{I}_\lambda = \otimes_{w \in W} \mathbb{C}\tau_w(e \otimes 1_\lambda)$ となる. また主系列加群の普遍性より $\pi_{w,w\lambda}(e \otimes 1_{w\lambda}) = \tau_w(e \otimes 1_\lambda)$ となる $\mathbf{I}_{w\lambda}$ から $_\lambda$ への $\mathbf{H}$ 加群射 $\pi_{w,w\lambda}$ が一意に存在する. この $\mathbf{H}$ 加群射を用いて次が示される;

Proposition 2 (Kato, [11] Corollary 3.2.). $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ に対し次の 2 条件は同値 ;
(i) $\mathbf{I}_\lambda$ は単純である.
(ii) $\lambda(\alpha^\vee)^2 \neq (k_\alpha \lambda(c))^2$ $(\forall \alpha \in R)$.

---

[1] 例えば [9] 等の定義では c が現れないが, これは考えている表現空間上に c が 1 で作用していると考えるので, 最初から定義には $c = 1$ としている. また有理型 Dunkl 作用素と W により生成される作用素代数を考えるときは, c が 0 で作用していると考える.

これに注意して

$$R_{\lambda,k,+} \ := \ \{ \ \alpha \in R_+ \ : \ \lambda(\alpha^\vee)^2 = (k_\alpha \lambda(c))^2 \ \}$$

という R_+ の部分集合を考える.

Proposition 3 ([11] Proposition 2.3.). $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$, $w \in W$ に対し, $K_0(\mathcal{R}(\mathbf{H}))$ に於いて $[\mathbf{I}_\lambda] = [\mathbf{I}_{w\lambda}]$.

これにより $W\lambda$ の中の 1 つについて $\mathbf{I}_{w\lambda}$ の組成列を構成することにする. また

$$R_{w\lambda,k,+} \ = \ \{ \ \alpha \in R_+ \ : \ w\lambda(\alpha^\vee) = k_\alpha \lambda(c) \ \}$$

となるような $w \in W$ が存在することが整 Weyl 群のときの議論と同様にしてわかるので, 以下では $R_{\lambda,k,+} = \{\alpha \in R_+ \ : \ \lambda(\alpha^\vee) = k_\alpha \lambda(c)\}$ となっていると仮定する.

$\mathbf{H}$ 上に次のように対合 ι を定義する;

$$\iota(w) \ := \ (-1)^{l(w)} w^{-1}, \qquad \iota(\xi) \ := \ -w_0 \cdot w_0(\xi) \cdot w_0 \qquad (w \in W, \ \xi \in \widehat{\mathfrak{h}}).$$

この ι を用いて $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R}(\mathbf{H}))$ に対し

$$h \cdot f(m) \ := \ f(\iota(h)m) \qquad (f \in M^*, h \in \mathbf{H}, m \in M)$$

により M^* に左 $\mathbf{H}$ 加群の構造を定義する. M に対し $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ で $M^* \times M$ 上の自然な pairing を表すとする. 特に $M = \mathbf{I}_\lambda$ のときを考えると, 左 $\mathbf{H}$ 加群として $\mathbf{I}_\lambda \cong \mathbf{I}_{-\lambda}$ となることがわかる. 従って pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{I}_\lambda}$ から $\mathbf{I}_{-\lambda} \times \mathbf{I}_\lambda$ 上の pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ が誘導される. これは特に非退化である. これを用いて $N \subset \mathbf{I}_\lambda$ に対し

$$N^\perp \ := \ \{ \ m \in \mathbf{I}_{-\lambda} \ : \ \langle m, N \rangle_\lambda = 0 \ \}$$

とする. 同様に $N' \subset \mathbf{I}_{-\lambda}$ に対しても $N'^\perp$ を定義する. 特に N が $\mathbf{I}_\lambda$ の部分 $\mathbf{H}$ 加群ならば $N^\perp$ は $\mathbf{I}_{-\lambda}$ の部分 $\mathbf{I}_{-\lambda}$ の部分 $\mathbf{H}$ 加群であり, また

$$N \ \subset \ N' \quad \Rightarrow \quad N'^\perp \ \subset \ N^\perp,$$
$$(N \cap N')^\perp \ = \ N^\perp + N'^\perp, \qquad (N + N')^\perp \ = \ N^\perp \cap N'^\perp$$

となっている.

これ以降では k 及び $\lambda(c)$ について $k_\alpha, \lambda(c) \neq 0 \ \ (\forall \alpha \in R)$ であると仮定する.

§2. λ が正則な場合の組成列の構成

λ が正則な場合を考える.

$\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ に対し

頂点の集合 : $W\lambda$ $(= \lambda$ の W 軌道)

辺 : $w\lambda - w'\lambda \;\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}\; \exists\, \alpha \in \Pi$ s.t. $w'\lambda = r_\alpha w'\lambda$ and $w\lambda(\alpha^\vee)^2 \neq (k_\alpha \lambda(c))^2$

とすれば graph が定まる. この graph を $\Gamma(\lambda)$ と記す.

Proposition 4 (Rodier, [11] Proposition 3.5.). λ が正則なとき, $\Gamma(\lambda)$ の連結成分と $\mathbf{I}_\lambda$ の組成因子との間に 1 対 1 の対応がある.

更にこの graph の連結成分と $R_{\lambda,k,+}$ との間には次のような関係がある:

Proposition 5 (Ram [10]). $\Gamma(\lambda)$ の連結成分と $R_{\lambda,k,+}$ の冪集合の元との間に 1 対 1 の対応がある.

従って $l = \sharp R_{\lambda,k,+}$ とすれば λ が正則なとき, $\mathbf{I}_\lambda$ の組成因子は 2^l 個あることになる. よって $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列を構成するには $2^l - 1$ 個の真部分加群からなる減少列を構成すればよいことになる. λ が正則な場合, $R_{\lambda,k,+} \subset \Pi$ と仮定することができる. $R_{\lambda,k,+} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ とし, $\Theta \subset R_{\lambda,k,+}$ に対し

$$E'_\Theta(\lambda) \;:=\; \bigcap_{\beta\in\Theta} \mathrm{Im}\,\pi_{r_\beta, r_\beta\lambda} \;=\; \bigcap_{\beta\in\Theta} E'_{\{\beta\}}(\lambda)$$

とする. また順序を適当に決めておきたいので, 次のよう言葉を用意しておく.

$$\Xi \;:=\; \left\{(i_1, \cdots, i_l) \in \{1, \ldots, l, \infty\}^{\times l} \;:\; 1 \leq \exists\, p \leq l \text{ s.t. } \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq l \\ \text{and } i_{p+1} = \cdots = i_l = \infty \end{array}\right\}$$

$\sharp\Xi = 2^l$ であり, 更に Ξ の元の間には辞書式順序により順序 $\prec$ を定義しておく, i.e.

$$(i_1, \cdots, i_l) \prec (j_1, \cdots, j_l) \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \quad \exists\, m \in \{1, \ldots, l\} \text{ s.t. } \begin{array}{c} i_1 = j_1, \cdots, i_{m-1} = j_{m-1}, \\ i_m < j_m \end{array}.$$

$\prec$ は Ξ 上の全順序であり, $(1, \cdots, l)$, $(\infty, \cdots, \infty)$ がそれぞれ最小, 最大元になる. 今 $\Theta = \{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_p}\}$ に対し $E'_\Theta(\lambda)$ を $E'_{(i_1,\ldots,i_l)}(\lambda)$ (ただし $i_{p+1} = \cdots = i_l = \infty$ とし, $E'_{\{\alpha_{i_j}\}}(\lambda) = \mathbf{I}_\lambda$ $(p+1 \leq j \leq l)$ とする) とし, $(i_1, \cdots, i_l) \in \Xi$ に対し

$$E^\lambda_{(i_1,\cdots,i_l)} \;:=\; \sum_{(j_1,\cdots,j_l)\preceq(i_1,\cdots,i_l)} E'_{(j_1,\cdots,j_l)}(\lambda)$$

とする.

Proposition 6. λ が正則なとき, $\Xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_{2^l}\}$ $(i < j \;\Rightarrow\; \xi_i \prec \xi_j)$ とすると,

$$0 \subsetneq E^\lambda_{\xi_1} \subsetneq \cdots\; E^\lambda_{\xi_{2^l-1}} \subsetneq E^\lambda_{\xi_{2^l}} = \mathbf{I}_\lambda$$

は $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列となる.

また同様に $\mathbf{I}_{-\lambda}$ の組成列

$$0 \subsetneq E_{\xi_1}^{-\lambda} \subsetneq \cdots E_{\xi_{2^l-1}}^{-\lambda} \subsetneq E_{\xi_{2^l}}^{-\lambda} = \mathbf{I}_{-\lambda}$$

も得られる. 特に $\mathbb{C}[W]$ 加群として $E_{\xi_i}^{\lambda} \simeq E_{\xi_i}^{-\lambda}$ となっている. $\xi = (i_1, \cdots, i_l) \in \Xi$ に対し

$$\xi^{\perp} := (1, \cdots, \widehat{i_1}, \cdots, \widehat{i_2}, \cdots, \widehat{i_{p-1}}, \cdots, i_p, \overbrace{\infty, \cdots, \infty}^{l-i_p+p-1}) \qquad (i_p \leq l,\ i_{p+1} = \infty)$$

とすると, 上の Proposition の ξ_i に対し $\xi_i^{\perp} = \xi_{2^l-i}$ となり, また $(\cdot)^{\perp}$ に関し,

$$E_{\xi_{2^l-i}}^{\lambda} = E_{\xi_i^{\perp}}^{\lambda} = (E_{\xi_i}^{-\lambda})^{\perp}$$

となり, これらから次のような双対性を得る :

Proposition 7. λ が正則なとき, $i \in \{1, \ldots, 2^l\}$ に対し

$$\dim_{\mathbb{C}} E_{\xi_i}^{\lambda} / E_{\xi_{i-1}}^{\lambda} = \dim_{\mathbb{C}} E_{\xi_{2^l-i+1}}^{\lambda} / E_{\xi_{2^l-i}}^{\lambda},$$

ただし $E_{\xi_0}^{\lambda} = 0$ とする.

Example 1. R が A_3 型の root system のときに上の組成列を具体的に記述してみる. 例えば $\lambda(\alpha_i^{\vee}) = k_{\alpha}\lambda(c)$ $(i = 1, 2, 3)$ (即ち ◎−◎−◎ のとき, §3 Example 2 参照) であるとする. $E_i = E_i^{+} = E'_{\{\alpha_i\}}(\lambda)$, また $E_{i \cdot j} = E_{i \cdot j}^{+} = E_i \cap E_j$, $E_{i \cdot j+k} = E_{i \cdot j+k}^{+} = E_i \cap E_j + E_k$ 等と表すことにすると, $\mathbf{I}_{\lambda}$ の組成列は

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \subsetneq & E_{1\cdot2\cdot3} & \subsetneq & E_{1\cdot2} & \subsetneq & E_{1\cdot2+1\cdot3} & \subsetneq & E_1 \\ & & & & & & & & \| \\ \mathbf{I}_{\lambda} & \supsetneq & E_{1+2+3} & \supsetneq & E_{1+2} & \supsetneq & E_{1+2\cdot3} & \supsetneq & E_1 \end{array}$$

となり, 特に最大の部分加群が E_{1+2+3} であることがわかる. また $E_{i \cdot j}^{-}, E_{i+j}^{-}$ 等を $\mathbf{I}_{-\lambda}$ に於ける $E_{i \cdot j}, E_{i+j}$ 等の対応物とするとき, $(\cdot)^{\perp}$ で対応するものは

$$E_{1\cdot2\cdot3}^{\pm} \leftrightarrow E_{1+2+3}^{\mp}, \quad E_{1\cdot2}^{\pm} \leftrightarrow E_{1+2}^{\mp}, \quad E_{1\cdot2+1\cdot3}^{\pm} \leftrightarrow E_{1+2\cdot3}^{\mp}, \quad E_1^{\pm} \leftrightarrow E_1^{\mp}$$

となる. これは部分加群の和をとる操作と共通部分をとる操作を入れ替えたものになっている. また次元について

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{w_0\lambda} &= \dim_{\mathbb{C}} E_{1\cdot2\cdot3} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{I}_{\lambda} / \dim_{\mathbb{C}} E_{1+2+3} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{\lambda}, \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{r_1r_2r_1\lambda} &= \dim_{\mathbb{C}} E_{1\cdot2}/E_{1\cdot2\cdot3} = \dim_{\mathbb{C}} E_{1+2+3}/E_{1+2} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{r_3\lambda} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{r_1r_3\lambda} &= \dim_{\mathbb{C}} E_{1\cdot2+1\cdot3}/E_{1\cdot2} = \dim_{\mathbb{C}} E_{1+2}/E_{1+2\cdot3} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{r_2\lambda} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{r_1\lambda} &= \dim_{\mathbb{C}} E_1/E_{1\cdot2+1\cdot3} = \dim_{\mathbb{C}} E_{1+2\cdot3}/E_1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbf{J}_{r_2r_3r_2\lambda} \end{aligned}$$

となる.

以上は $\mathbf{H}$ 加群射 $\pi_{r_\alpha, r_\alpha\lambda}$ を基にして組成列を考察したが, 実は次のような記述もできる.

$\mathbb{C}[W]$ は通常の W の元に関する基底 $\{w\}_{w\in W}$ と generic Hecke 代数内の Kazhdan-Lusztig 基底 $\{C_w\}_{w\in W}$, $\{C'_w\}_{w\in W}$ ([6] Theorem 7.9, 及び Remark 7.9 参照) の $q \to 1$ における特殊化より得られる基底 $\{e_w\}_{w\in W}$, $\{e'_w\}_{w\in W}$ があり, この $\{e'_w\}_{w\in W}$ を用いること

にする．更に $w \in W$ に対し L_w を R に対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の最高 weight $-w\rho-\rho$ をもつ単純加群とするとき，

$$\begin{array}{llll} y \le_L x & \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} & \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})} L_x \subseteq \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})} L_y \\ x \sim_L y & \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} & x \le_L y \text{ or } y \le_L x \end{array}$$

とし[2]，この同値関係による $w \in W$ の属する同値類 (left cell) を c_w と記すことにする．特に $\Omega = c_e$, $c_0 = c_{w_0}$ とする．$w, x \in W$ に対し $x \le_L y$ となる $y \in c_w$ があるとき $x \le_L c_w$ と記す．このとき

$$E'_{c_w}(\lambda) := \oplus_{x \le_L c_w} \mathbb{C} e'_x \otimes 1_\lambda \quad (\subset \mathbf{I}_\lambda)$$

とする．$E'_{c_w}(\lambda)$ は $\mathbf{I}_\lambda$ の部分 $\mathbb{C}[W]$ 加群であるが，一般には部分 $\mathbf{H}$ 加群ではない．しかし次のことが知られている：

Proposition 8 ([11] Proposition 4.3). $\Theta \subset \Pi$ に対し，w_Θ を Θ に対応する W の放物型部分群の最長元とし，c_Θ を w_Θ の属する left cell とするとき，$\lambda(\alpha^\vee) = k_\alpha \lambda(c)$ $(\forall \alpha \in \Theta)$ ならば $E'_\Theta(\lambda) = E'_{c_\Theta}(\lambda)$ となる．

故にこの場合は $E'_{c_\Theta}(\lambda)$ は $\mathbf{I}_\lambda$ の部分 $\mathbf{H}$ 加群となる．このようにして得られる $\mathbf{I}_\lambda$ の部分 $\mathbf{H}$ 加群 $E'_{c_\Theta}(\lambda)$ は "放物型錐上の表現" と呼ばれている ([11],§4)．特に λ が正則なときは $R_{\lambda,k,+} \subset \Pi$ と仮定しても良かったので，§2 で構成された組成列に現れる部分 $\mathbf{H}$ 加群は幾つかの放物型錐上の表現の和として表されることになる．

§3 A_3 型の H の主系列加群の組成列の構成

以下，R は A_3 型の root system だとし，$R = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$　$W = \mathfrak{S}_4$ とする．また $k_\alpha \lambda(c) = 1$ であると仮定する．

λ が正則ならば，$\mathbf{I}_\lambda$ の組成列を放物型錐上の表現の和で構成でたが，λ が退化している場合，実は放物型錐上の表現だけでは組成列は構成できない．§2 で見たように組成列の半分を構成できれば (半分とは，例えば Example 1 の $0 \subsetneq E_{1\cdot2\cdot3} \subsetneq E_{1\cdot2} \subsetneq E_{1\cdot2+1\cdot3} \subsetneq E_1$ という E_1 の部分加群の降鎖)，後は $(\cdot)^\perp$ によってもう半分を構成できるので，この半分の組成列を構成することにする．

[1] に於いて A_n 型の root system に対する退化 affine Hecke 代数に対し，standard module という加群が構成され，更に standard module とそれらの単純剰余加群に関する重複度公式が Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて記述されることが証明されている．詳しくは [1] を参照してもらうことにして，この重複度公式を用いて組成因子を求めておき，それにあわせて部分加群を構成していく，という手順で半分の組成列を作っていく．

以下で特徴的な幾つかの例を挙げることにする；

Example 2. [$\lambda(\alpha_1^\vee) = \lambda(\alpha_2^\vee) = 1$, $\lambda(\alpha_3) = 0$ の場合].
λ に対する条件をもう少し印象的に記すために Dynkin 図形を使って，各頂点に対し対応する simple root α につてい $\lambda(\alpha) = 1$ ならば，その頂点を ◎ で，$\lambda(\alpha^\vee) = 0$ のときは ●，いずれの場合でもないときは ○ で表すことにする．すると今の場合は ◎−◎−● ということになる．このとき $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列として

$$0 \subsetneq E'_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}(\lambda) \subsetneq E'_{\{\alpha_1\}}(\lambda) \subsetneq E'_{\{\alpha_1\}}(\lambda) + E'_{\{\alpha_2\}}(\lambda) \subsetneq \mathbf{I}_\lambda$$

---

[2] $\le_L$ の定義は [3] に従って，包含関係と逆の順序を考える．

が構成できる．実は $\lambda'(\alpha_1^\vee) = \lambda'(\alpha_2^\vee) = 1$, $\lambda'(\alpha_3) \neq 0, 1$ である場合も同じ組成列を構成できる．適当に $\mathbf{I}_{\lambda'}$ の基底を取って，各 $\mathbf{H}$ の元のこの基底に関する表現行列を考えると，λ' の有理関数が現れる．今の場合，λ を $\lambda'(\alpha_1^\vee) = \lambda'(\alpha_2^\vee) = 1$ という平面に沿って $\lambda' \to \lambda$ とした極限として $\mathbf{I}_\lambda$ の組成列が構成されていることになる．A_3 ではないが，A_2 型の root system で視覚的に表現すると，例えば $\lambda'(\alpha_2^\vee) = 1$ という直線に沿って，$\lambda' \to \lambda$ とするというのは下の Figure 1 のようにすること．

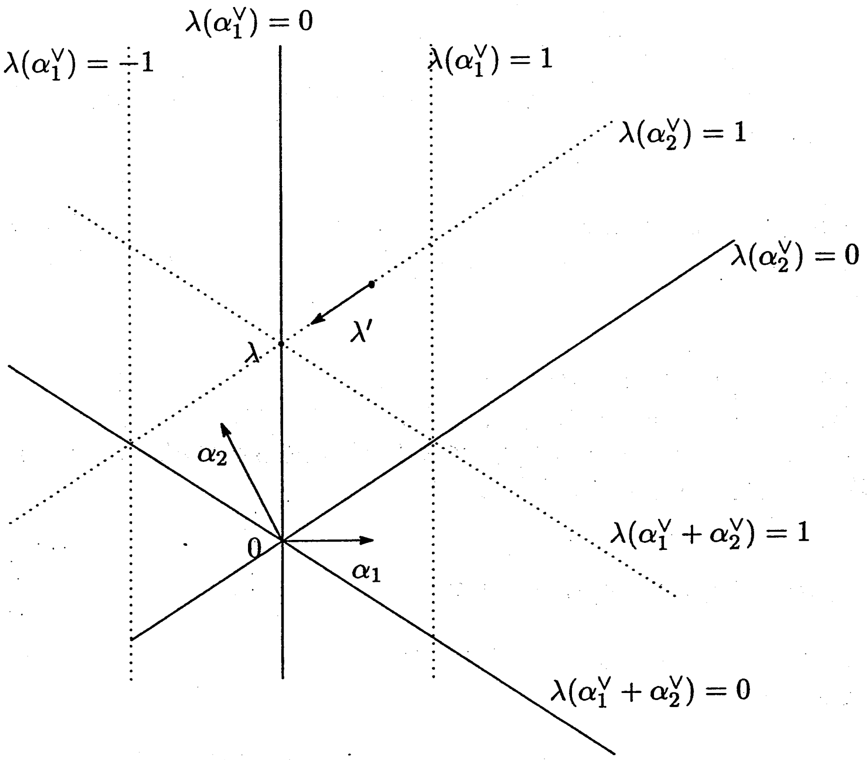
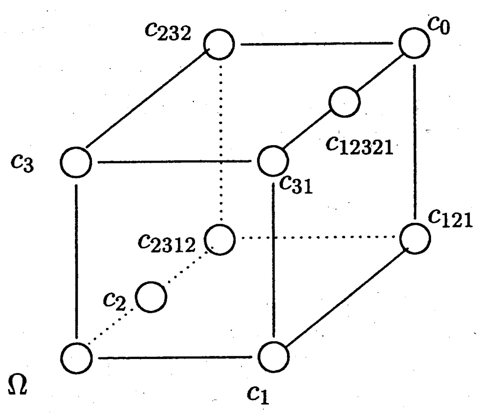


FIGURE 1.



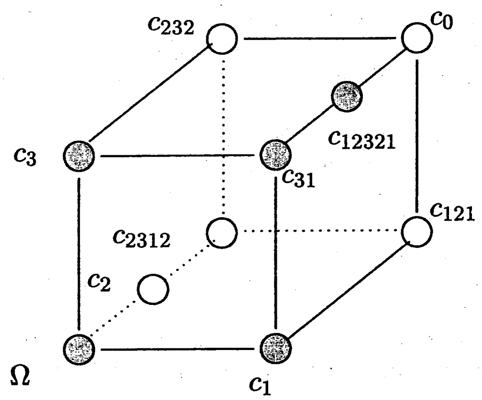
左図に於いて
各頂点は $\mathfrak{S}_4$ の
left cell に対応する．
例えば c_{ij} は $r_i r_j$ を
唯一の involution として含む
$\mathfrak{S}_4$ の left cell.
また各辺は順序 $\leq_L$ について
関係することを表し，左下より
右上にあるものが大きくなる．
例えば，$c_3 \leq_L c_{232}$ 等．
ただし c_{2312} に対応する頂点が
2 箇所あることに注意する．

FIGURE 2.

Example 3. $[\lambda(\alpha_1^\vee) = \lambda(\alpha_3^\vee) = 1,\ \lambda(\alpha_2) = 0$ (◎−●−◎) の場合].
この場合, Example 2 の場合とは異なり, 放物型錐上の表現では得られない部分加群が現れる. §2 で left cell c に対して部分 $\mathbb{C}$ 線形空間 $E'_c(\lambda)$ を考えたが, 特に c として Figure 2 の c_{12321} という left cell を考える. このとき

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \subsetneq & E'_{c_{12321}}(\lambda) & \subsetneq & E'_{\{\alpha_1,\alpha_3\}}(\lambda) & \subsetneq & E'_{\{\alpha_1\}}(\lambda) \\ & & & & & & \| \\ \mathbf{I}_\lambda & \supsetneq & E'_{c_{12321}}(-\lambda)^\perp & \supsetneq & E'_{\{\alpha_1\}}(\lambda) + E'_{\{\alpha_3\}}(\lambda) & \supsetneq & E'_{\{\alpha_1\}}(\lambda) \end{array}$$

という組成列を構成できる. $E'_{\{\alpha_1\}}(\lambda), E'_{\{\alpha_3\}}(\lambda)$ については Example 2 のように λ を少しずらした正則な λ' (◎−○−◎ の場合) に於ける主系列加群の部分加群の極限として解釈できるが, $E'_{c_{12321}}(\lambda)$ については今のところ不明である. ただし c_{12321} という left cell は c_1, c_3 より $\leq_L$ に関し同時に小さい left cell になっていることがわかる (Figure 3 参照).



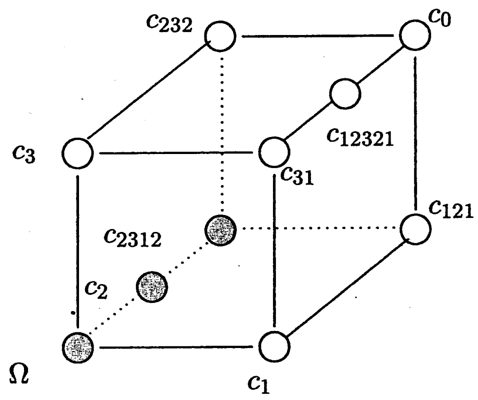
塗りつぶされた頂点が組成列に現れる left cell に対応する頂点である.

FIGURE 3.

Example 4. $[\lambda(\alpha_1^\vee) = \lambda(\alpha_3^\vee) = 0,\ \lambda(\alpha_2) = 1$ (●−◎−●) の場合].
この場合も 3 と同様で, 放物型錐上の表現では得られない部分加群が現れる. この場合 c として Figure 2 の c_{2312} という left cell を考える. このとき

$$0 \subsetneq E'_{\{\alpha_2\}}(\lambda) \subsetneq E'_{c_{2312}}(\lambda) \subsetneq E'_{\{\alpha_2\}}(-\lambda)^\perp \subsetneq \mathbf{I}_\lambda$$

という組成列を構成できる. $E'_{\{\alpha_2\}}(\lambda)$ については 正則な λ' (○−◎−○ の場合) に於ける主系列加群の部分加群の極限として解釈できるが, $E'_{c_{2312}}(\lambda)$ については今のところ不明である (Figure 4 参照).



Example 3 と同様に, 塗りつぶされた頂点が組成列に現れる left cell に対応する頂点である.

FIGURE 4.

これらの例からわかるように, 主系列加群の parameter の退化性と left cell が何らかの対応を持つことが組成列を構成することで確かめられる. A_4, A_5 型などでも同様にして半分の組成列を構成して, そこに現れる left cell と λ の退化性との関係について調べているが, 今のところその関係は全くはっきりしていない.

References

[1] T. Arakawa, T. Suzuki, *Duality between $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ and the degenerate affine Hecke algebra*, J. Algebra 209 (1998), no. 1, 288–304.

[2] S. Evens, *The Langlands classification for graded Hecke algebras.* Proc. A.M.S. 124 (1996), no. 4, 1285–1290.

[3] D. Kazhdan, G. Lusztig *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. 53 (1979), no. 2, 165–184.

[4] G. Lusztig, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras*, I, I.H.E.S. Publ. Math. No. 67, (1988), 145–202, ibid. II, Representations of groups; CMS Conf. Proc., 16, (1995), 217–275.

[5] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 3, 599–635.

[6] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] H. Matsumoto, *Analyse harmonique dans les systémes de Tits bornologiques de type affine*, LNM, Vol. 590. Springer-Verlag, 1977.

[8] E. Opdam, *Lectures on Dunkl operators*, preprint 1998.

[9] E. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. 175 (1995), no. 1, 75–121.

[10] A. Ram, *Standard Young tableaux for finite root systems*, preprint 1998.

[11] J. D. Rogawski, *On modules over the Hecke algebra of a p-adic group*, Invent. Math. 79 (1985), no. 3, 443–465.